

Использование системы дифференциальных уравнений для прогнозирования долгосрочной динамики запасов лекарственных растений в лесных фитоценозах

© 2019. Н. И. Федоров¹, д. б. н., доцент, зав. лабораторией, С. Н. Жигунова¹, к. б. н., с. н. с., О. И. Михайленко², к. х. н., доцент, К. И. Михайленко³, к. ф.-м. н., доцент, с. н. с., Л. Г. Наумова⁴, к. б. н., профессор, В. П. Путенихин⁵, д. б. н., профессор,

¹Уфимский Институт биологии Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054, Россия, г. Уфа, Проспект Октября, д. 69,

²Уфимский государственный нефтяной технический университет, 450062, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1, корп. 1,

³Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054, Россия, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71,

⁴Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, 450008, Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, д. За,

⁵Башкирский государственный университет, 450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32,

e-mail: fedorov@anrb.ru, trioksan@mail.ru, const@uimech.org, leniza.gumerovna@yandex.ru, vpp99@mail.ru

На примере сосново-берёзовых лесов ассоциации *Bupleuro longifoliae* — *Pinetum sylvestris* центральной части горно-лесной зоны Республики Башкортостан разработан способ моделирования долгосрочного изменения площадей разновозрастных лесов и вырубок. При построении модели использована система дифференциальных уравнений. В качестве предикторов модели использованы данные о площадях разновозрастных лесов с доминированием сосны, лиственницы, берёзы и осины, площади вырубок на момент проведения лесоустройства, действующая лесосека, а также рекомендации по лесовосстановлению и площади рекомендуемого проведения лесовосстановительных мероприятий на вырубках лесов с разным исходным составом древостоя. При моделировании также анализировались последствия использования других рекомендуемых в лесохозяйственной практике лесосек (первая и вторая возрастные, интегральная). Модель позволяет делать долгосрочные прогнозы динамики запасов видов, основным местом сбора сырья которых являются вырубки. В качестве примера приведён долгосрочный прогноз изменения биологического запаса на вырубках листьев *Chamaenerion angustifolium* (L.) Scop., используемых в фитотерапии, а также в производстве тонизирующего напитка «Иван-чай». В качестве исходных данных использовалась рассчитанная ранее средняя продуктивность листьев *C. angustifolium* на молодых вырубках до 5 лет и зарастающих вырубках от 5 до 10 лет. Установлено, что при соблюдении действующей лесосеки в полном объёме запас листьев этого вида будет увеличиваться в связи с увеличением площадей вырубок и через 40–50 лет стабилизируется на уровне, значительно превышающем современный.

Ключевые слова: моделирование, дифференциальные уравнения, лекарственные растения, ресурсный запас, вырубки, Южный Урал.

Using a system of differential equations to predict the long-term dynamics of stocks of medicinal plants in forest phytocenoses

© 2019. N. I. Fedorov¹ ORCID: 0000-0002-0167-7449¹, S. N. Zhigunova¹ ORCID: 0000-0002-7129-8292²

O. I. Mikhaylenko² ORCID: 0000-0001-5835-9145³, K. I. Mikhaylenko³ ORCID: 0000-0001-8703-442X⁴

L. G. Naumova⁴ ORCID: 0000-0001-7776-0786⁵, V. P. Putenikhin⁵ ORCID: 0000-0002-9809-4468⁶

¹Ufa Institute of Biology, Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 69, Prospect Oktyabrya, Ufa, Russia, 450054,

²Ufa State Petroleum Technological University,
building 1, 1, Kosmonavtov St., Ufa, Russia, 1450062,

³Institute of Mechanics, Subdivision of the Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences,
71, Prospect Oktyabrya, Ufa, Russia, 450054,

⁴Bashkir State Pedagogical University n. a. M. Akmulla,
3a, Oktyabrskoy revolyucii St., Ufa, Russia, 450008,

⁵Bashkir State University,
32, Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450076,
e-mail: fedorov@anrb.ru 32, trioksan@mail.ru, const@uimech.org,
leniza.gumerovna@yandex.ru, vpp99@mail.ru

The method of modeling of long-term changes of the area size of different-age forests and felled areas up to 10 years has been developed. It was developed on the example of pine-birch forests of the *Bupleuro longifoliae* – *Pinetum sylvestris* association in the central part of the mountain-forest zone of the Republic of Bashkortostan. A system of differential equations is used for the building of model. Data of the areas of different-age pine, larch, birch and aspen forests, the cutting area at the time of forest management, the current annual allowable cut, as well as recommendations for reforestation on felled areas with different initial composition of the timber stand were used as the predictors for modeling. The consequences of the possible use of other recommended calculations of annual allowable cut in the forest practice (the first and second age-, integral annual allowable cut) were also analyzed in the modeling. The model based on differential equations allows to make long-term forecasts of the dynamics of stocks of medicinal species, the main harvesting point for raw materials are felled areas. Long-term forecast of change of the stock of *Chamaenerion angustifolium* (L.) Scop. on felled areas is given as an example. This species is used in phytotherapy and the production of the tonic Ivan-tea, which is in great demand. As basic dates, the previously calculated average leaf productivity of *C. angustifolium* on different-aged felled areas was used. It has been established, the stock of leaves of this species will increase due to the increase in the cutting area that if the current annual allowable cut will be fully implemented. After 40–50 years the stock of leaves of this species will stabilize at a level significantly higher than current level.

Keywords: medicinal plants, differential equations, forecasting of the resource reserves, felled areas, Southern Urals.

На территории Республики Башкортостан (РБ) собирается и реализуется более 300 видов лекарственных растений [1], большая часть из которых заготавливается в горно-лесной зоне. На залесённых территориях наибольшее влияние на ресурсную базу лекарственных растений оказывает лесохозяйственная деятельность, которая ведёт к изменению соотношения площадей лесов и вырубок. На примере анализа вырубок на месте сосново-берёзовых лесов ассоциации *Bupleuro longifoliae* – *Pinetum sylvestris* было показано, что разнообразие и продуктивность лекарственных трав существенно различаются под пологом леса, на вырубках до пяти лет и на зарастающих вырубках возрастом от пяти до десяти лет [2]. Большинство этих видов в исходных лесах не имеют достаточной для заготовок продуктивности, но на вырубках происходит разрастание некоторых из них (*Aconitum septentrionale* Koelle, *Bupleurum longifolium* L., *Chamaenerion angustifolium* (L.) Scop., *Origanum vulgare* L., *Valeriana wolgensis* Kazak., *Primula macrocalix* Bunge и др.). При этом на вырубках нет необходимости нормировать их заготовки, так как разросшиеся в начале восстановительной сукцессии виды в любом случае снижают своё обилие после формирования сомкнутого дре-

востоя. Поэтому для прогнозирования ресурсной базы лекарственных видов растений на залесённых территориях есть необходимость долгосрочного моделирования изменения площадей вырубок. Прогнозирование изменения пространственной структуры лесного покрова затруднительно в силу нескольких причин. Лесопокрываемые территории представляют собой «лоскутное одеяло» из разновозрастных участков леса, на которых в разное время и в разной последовательности будут проводиться рубки. При этом, так как прогноз составляется для значительных по площади территорий, невозможно точно спрогнозировать, где и когда будут проводиться рубки. Во-вторых, лесосека, рассчитываемая для каждой лесобразующей породы, может не реализовываться в полном объёме. Тем не менее, в материалах лесоустройства содержится достаточное количество характеристик древостоя и планы по лесопользованию и лесовосстановлению, которые могут быть использованы в качестве предикторов модели для прогноза изменения ресурсной базы лекарственных растений.

Цель работы – разработка модели долгосрочной динамики запасов сырья лекарственных видов растений в условиях различных режимов лесопользования с использованием

системы дифференциальных уравнений на примере центральной части горно-лесной зоны РБ.

Объекты и методы

Объект исследования – сосново-берёзовые леса ассоциации *Bupleuro longifoliae – Pinetum sylvestris* на территории Авзянского лесхоза, расположенного в центральной части горно-лесной зоны РБ и занимающего площадь 271399 га. Леса этой ассоциации занимают более 70% лесопокрытой территории лесхоза [2]. В конце XX века они подвергались интенсивной рубке. Доминантами древесного яруса в этих лесах могут выступать *Pinus sylvestris* L., *Betula pendula* Roth, *Populus tremula* L. и реже *Larix sibirica* Ledeb. На вырубках этих лесов возрастом до десяти лет формируются растительные сообщества ассоциации *Chamaenerio angustifolii – Deschampsietum cespitosae*. При расчёте запасов лекарственных видов использовались данные об их продуктивности на вырубках до пяти и от пяти до десяти лет, рассчитанные ранее [2, 3].

При построении модели использованы данные о площади разновозрастных лесов с доминированием сосны, лиственницы, берёзы и осины, площади вырубок на момент проведения лесоустройства, действующая лесосека, рекомендуемые возраста рубок основных древесных пород, а также рекомендации по лесовосстановлению и площади рекомендуемого проведения лесовосстановительных мероприятий на вырубках лесов с разным исходным составом древостоя. Кроме того, при моделировании рассматривались варианты использования других рекомендуемых в лесохозяйственной практике лесосек [4].

Современный подход к изучению сообществ предполагает интеграцию и совместную обработку больших массивов наблюдений [5], что особенно актуально при анализе структуры лесных сообществ. Для построения модели долгосрочной динамики запасов сырья лекарственных видов растений в условиях различных режимов лесопользования использовалась система дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения широко используются при моделировании в экологических исследованиях [6]. Применительно к исследованию лесных сообществ дифференциальные уравнения были использованы для моделирования динамики численности взрослых деревьев [7–9], для оценки роста и продуктивности древостоя [10], оценки

устойчивости заготовок постоянного объёма древесины леса в зависимости от начального распределения по возрасту древостоя [11], прогнозирования влияния изменения климата на оптимальный режим проведения рубок леса [12] и др.

Для численного решения дифференциальных уравнений использован программный модуль, написанный на языке Python. Высокоуровневый язык программирования Python активно используется в научных исследованиях, что определяется значительной и быстро расширяющейся базой специализированных библиотек, охватывающих различные аспекты моделирования, анализа и визуализации данных [13]. В программном модуле численное решение реализуется по методу Рунге-Кутты [14, 15]. Этот метод широко используется в биологических исследованиях [16]. Написанные на языке Python с использованием расширения SciPy программы для расчёта по математическим моделям биологических процессов имеют малое время разработки/отладки и зачастую нетребовательны к вычислительным ресурсам [17].

Результаты и обсуждение

В ходе проведения лесохозяйственной деятельности происходит ежегодная рубка перестойных лесов и переход части лесов из одной возрастной группы в другую, что может быть описано системой дифференциальных уравнений, характеризующих изменения площадей, занимаемых лесами и вырубками. При создании алгоритма долгосрочного прогнозирования было использовано разделение древостоя на четыре возрастные группы (молодняки I–II классов возраста; средневозрастные III класса возраста; приспевающие IV класса возраста; спелые и перестойные V класса возраста и выше), а вырубок на две группы (молодые до пяти лет и зарастающие – от пяти до десяти лет). Класс возраста для хвойных и твёрдолиственных пород семенного происхождения (дуб, клен, вяз и др.) составляет 20 лет, а для твёрдолиственных и мягколиственных пород порослевого происхождения (осина, липа, берёза, ольха и др.) – 10 лет [18]. Изменение площадей для каждого возрастного периода доминирующей породы можно описать системой уравнений вида:

$$\frac{dS_0}{dt} = S_0 - \xi_0 S_0 + \alpha \beta P S_N,$$

$$\frac{dS_i}{dt} = S_i - \xi_i S_i + \xi_{i-1} S_{i-1}, \quad i \in [2, N - 1],$$

$$\frac{dS_N}{dt} = S_N - PS_N + \xi_{N-1} S_{N-1},$$

где S_0 – площадь вырубок до пяти лет; S_N – площадь спелых и перестойных деревьев; S_i – площади леса всех остальных, промежуточных, возрастных периодов (S_1 – вырубки от 6 до 10 лет, S_2 – молодняки, S_3 – средневозрастные леса, S_4 – припевающие леса); элементы вектора ξ определены как $\xi_i = 1/y_i$, y_i – размер i -го временного периода в годах, $i \in [2, N-1]$; P – процент ежегодных рубок от площади спелых и перестойных лесов данной лесной породы согласно лесохозяйственному регламенту.

Коэффициент α характеризует долю площади вырубок, на которой происходит возобновление леса с преобладанием этой же породы путём самозарастания или создания монодоминантных культур. При коэффициенте α , равном единице, вся площадь вырубок возобновляется той же породой. Если коэффициент α составляет меньше единицы – часть площади вырубок возобновляется лесами иных пород, при коэффициенте α больше единицы происходит расширение площадей, занятых этой породой, за счёт посадок на местах вырубок лесов с другим древесным доминантом. Коэффициент β отражает долю выполнения лесосеки. Лесосека, которая рассчитывается для каждой породы, может не реализовываться в полном объёме. Часто рубят представляющие коммерческую ценность хвойные породы, а лесосека для менее ценных пород (осина, берёза), как правило, не реализуется даже на половину, что приводит к накоплению перестойных березняков и осинников. В РБ ситуация на данный момент изменилась в связи со строительством деревообрабатывающего завода «Кроношпан», поэтому можно ожидать, что в последующие годы лесосека по всем породам будет реализовываться в полном объёме.

Коэффициент α может быть рассчитан на основе планов создания лесных культур. В Авзянском лесхозе при рубке сосны на всех участках происходит самозарастание сосной или проводятся мероприятия по лесовосстановлению этой же породы. На вырубках берёзы происходит самозарастание берёзой, за исключением небольших площадей (0,15% от площади всех березняков), которые планируется засаживать сосной, елью и лиственницей. Осиновые леса лесхоза гораздо чаще подлежат замене на более ценные породы. Всего подлежат замене 12,52% от об-

щей площади осинников. При этом вырубки осинового леса восстанавливают сосной, елью, лиственницей, дубом и берёзой. Кроме того, в лесхозе имеются незначительные площади перестойных липняков, 23,14% которых подлежат замене на другие древесные породы, в том числе на сосну, лиственницу и берёзу. Также сосной планируется заменить 33,53% вырубок ельников, которые также занимают небольшие площади в лесхозе. В подавляющем большинстве случаев на месте посадок сосны формируются леса, флористически сходные с лесами ассоциации *Bupleuro longifoliae* – *Pinetum sylvestris*. Таким образом, коэффициент α для сосны может быть рассчитан по формуле:

$$\alpha_{C1} = \alpha_{C0} + \alpha_B + \alpha_{Oc} + \alpha_{Лп} + \alpha_E,$$

где α_{C1} – коэффициент перехода древесных пород; α_{C0} – коэффициент, равный единице, когда 100% площадей вырубок сосняков в дальнейшем возобновляются сосной; α_B – доля площадей, засаживаемых сосной на вырубках леса с доминированием берёзы; α_{Oc} – доля площадей, засаживаемых сосной на вырубках леса с доминированием осины; $\alpha_{Лп}$ – доля площадей, засаживаемых сосной на вырубках леса с доминированием липы; α_E – доля площадей, засаживаемых сосной на вырубках леса с доминированием ели.

Аналогично находятся коэффициенты α для осины, берёзы и лиственницы. Коэффициент α для осинников будет уменьшаться на доли площадей, которые планируется засадить другими породами (сосной, елью, лиственницей, дубом и берёзой). Коэффициент α для березняков будет уменьшаться на доли площадей, которые планируется засадить сосной, елью и лиственницей и увеличиваться за счёт посадок берёзы на вырубках осины и липы. Коэффициент α для лиственничников будет увеличиваться за счёт посадок лиственницы на вырубках осины, берёзы и липы. В нашем случае коэффициент α для сосняков, рассчитанный по этой формуле, равен 1,095, для осинников – 0,875, для березняков – 1,047, для лиственничников – 1,012. Таким образом, при соблюдении лесохозяйственного регламента площади сосняков и березняков лесхоза должны ежегодно увеличиваться за счёт посадок сосны и берёзы на площадях, ранее занятых другими породами, площади осинников будут уменьшаться, а площади лиственничников практически не изменятся. С учётом того, что площади вырубок липняков и ельников,

которые планируется засаживать сосной, незначительны, площади всех лесов ассоциации *Bupleuro longifoliae* – *Pinetum sylvestris* при соблюдении лесохозяйственного регламента будут увеличиваться незначительно (менее 1,5% за сто лет), но изменится соотношение лесов с доминированием сосны, берёзы и осины. Площади сообществ ассоциации с доминированием в древесном ярусе сосны увеличатся за этот период на 9%, в основном за счёт сокращения площадей осинников.

При долгосрочном моделировании необходимо учитывать, что в ходе лесохозяйственной деятельности могут изменяться расчётные лесосеки для древесных пород на территории проведения исследований. Согласно методике [4] рекомендованы три основных алгоритма расчёта лесосеки: первая возрастная, вторая возрастная и третья интегральная расчётные лесосеки.

На рисунке 1 (см. цв. вкладку) приведены результаты моделирования с использованием системы дифференциальных уравнений динамики площадей вырубок возрастом до 10 лет при использовании различных лесосек в сосново-берёзовых лесах центральной части горно-лесной зоны Южного Урала в течение 100 лет. В модели предусмотрены два варианта использования каждой из расчётных лесосек: при однократном расчёте лесосеки и при пересчёте лесосеки каждые 15 лет (рекомендованный срок проведения повторного лесоустройства). При построении модели предполагалось, что коэффициент β будет равен единице, т. е. лесосека будет выполняться в полном объёме.

Из рисунка 1 видно, что при соблюдении расчётных лесосек на начальных этапах (через 10–15 лет) площадь вырубок возрастает, а затем снижается и стабилизируется на более высоком уровне, чем в начальный период. При повторных пересчётах расчётных лесосек каждые 15 лет площади вырубок возрастают.

Модель позволяет делать долгосрочные прогнозы динамики запасов видов, основным местом сбора сырья которых являются вырубки. В качестве примера можно привести расчёт биологического запаса листьев *Chamaenerion angustifolium* (L.) Scop. на вырубках лесов ассоциации *Bupleuro longifoliae* – *Pinetum sylvestris* в Авзянском лесхозе (рис. 2, см. цв. вкладку).

В качестве исходных данных использовали рассчитанную ранее среднюю продуктивность листьев *C. angustifolium* на вырубках,

действующая в настоящее время лесосека и площадь вырубок на момент проведения последнего лесоустройства (2013 г.). На вырубках до пяти лет продуктивность этого вида составляет в среднем 0,98 ц/га, а на вырубках от пяти до десяти лет – 1,27 ц/га в сухом весе [2]. Из рисунка 2 видно, что запас листьев *C. angustifolium*, используемых в фитотерапии, а также в производстве пользующегося большим спросом тонизирующего напитка «Иван-чай», при соблюдении действующей лесосеки в полном объёме будет увеличиваться и через 40–50 лет стабилизируется на уровне, значительно превышающем современный. В дальнейшем, эта модель будет использоваться для прогнозирования запасов лекарственных видов на всех типах вырубок горно-лесной зоны РБ.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 075-00326-19-00 по теме № АААА-А18-118022190060-6 и при финансовой поддержке Программы Президиума РАН «Биоразнообразие природных систем. Биологические ресурсы России: оценка состояния и фундаментальные основы мониторинга» (проект Биоразнообразие и биоресурсы Южного Урала: мониторинг состояния, возможности использования и сохранения).

References

1. Zhigunova S.N. Analysis of officinal flora of Bashkortostan Republic // Samarskaya Luka: problemy regionalnoy i globalnoy ekologii. 2018. V. 27. No. 4 (1). P. 109–117 (in Russian). doi: 10.24411/2073-1035-2018-10098
2. Zhigunova S.N., Fedorov N.I., Mikhaylenko O.I., Akhmetova M.R. Productivity of medicinal plants on felled area of pine and birch forests in the central part of the South Urals // Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN. 2013. V. 15. No. 3 (1). P. 361–365 (in Russian).
3. Fedorov N.I., Zhigunova S.N., Mikhaylenko O.I. Methodological foundations of optimization resource use of officinal flora in the South Urals. Moskva: Nauka, 2013. 212 p. (in Russian).
4. Order of the Federal Forestry Agency of May 27, 2011 No. 191 “On approval of the procedure for calculating the estimated cutting area” [Internet resource] <https://rg.ru/2011/07/07/lesoseka-site-dok.html> (Accessed: 23.11.2018).
5. Shitikov V.K., Zinchenko T.D. Multivariate statistical analysis of ecological communities (review) // Theoretical and Applied Ecology. 2019. No. 1. P. 5–11 (in Russian). doi: 10.25750/1995-4301-2019-1-005-011
6. Chernova T.V., Poleshchuk O.M., Rubinshtein A.I., Serebrennikov P.S., Shipov N.V. The use of differential

**Н. И. ФЕДОРОВ, С. Н. ЖИГУНОВА, О. И. МИХАЙЛЕНКО,
К. И. МИХАЙЛЕНКО, Л. Г. НАУМОВА, В. П. ПУТЕНИХИН**
**«ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОЛГОСРОЧНОЙ ДИНАМИКИ ЗАПАСОВ
ЛЕКАРСТВЕННЫХ РАСТЕНИЙ В ЛЕСНЫХ ФИТОЦЕНОЗАХ», С. 55**

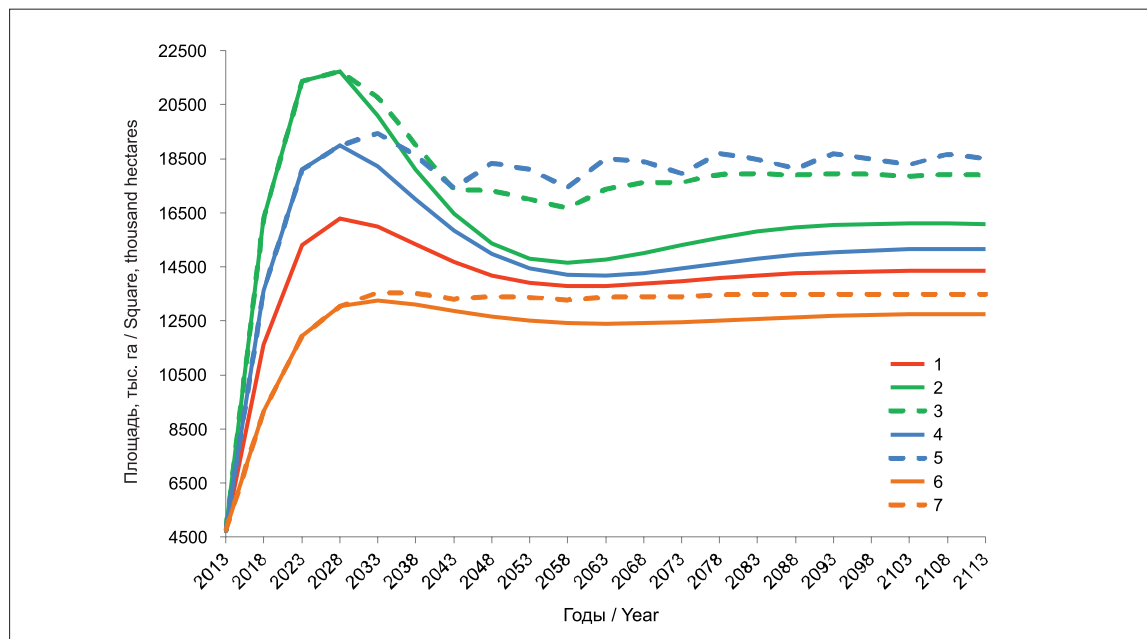


Рис. 1. Динамика площадей вырубок при разных лесосеках:

1 – при действующей лесосеке, 2 – при первой возрастной лесосеке,
3 – при первой возрастной лесосеке с 15-летним пересчётом, 4 – при второй возрастной лесосеке,
5 – при второй возрастной лесосеке с 15-летним пересчётом, 6 – при интегральной лесосеке,
7 – при интегральной лесосеке с 15-летним пересчётом

Fig. 1. Dynamics of felled areas size under different annual allowable cuts:

1 – with the current annual allowable cut, 2 – with the first age-annual allowable cut,
3 – with the first age-annual allowable cut with 15-year recount, 4 – with the second age-annual
allowable cut, 5 – with the second age-annual allowable cut with 15-year recount, 6 – with the integral
annual allowable cut, 7 – with an integral annual allowable cut with 15-year recount

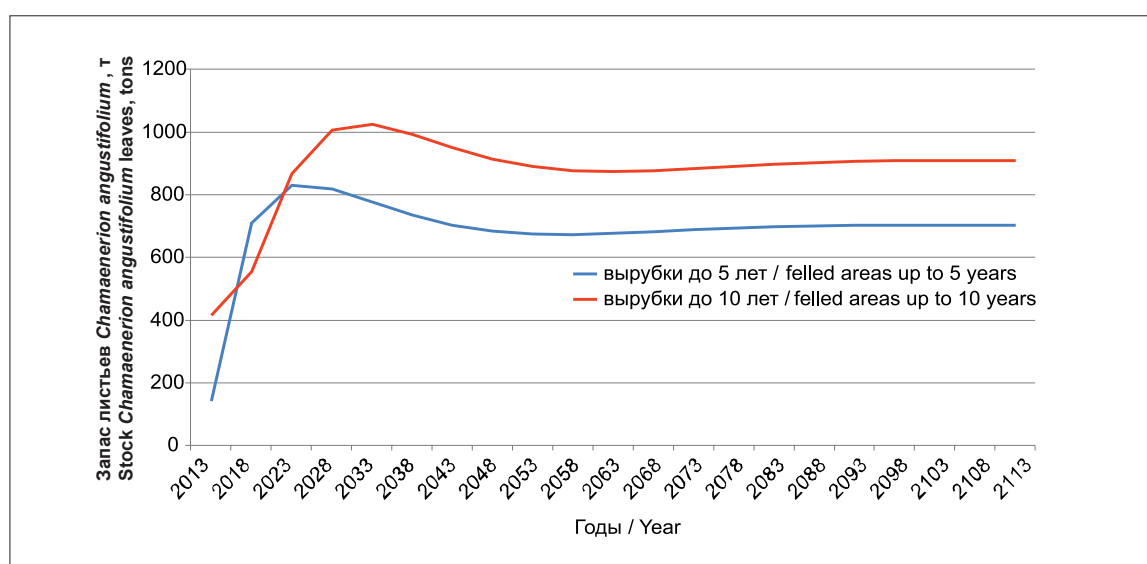


Рис. 2. Динамика биологического запаса листьев *Chamaenerion angustifolium*
на вырубках сосново-берёзовых лесов ассоциации

Bupleuro longifolii – *Pinetum sylvestris* в зависимости от изменения их площадей

Fig. 2. Dynamics of stock of *Chamaenerion angustifolium* leaves on felled areas of pine-birch forests
of the association *Bupleuro longifolii* – *Pinetum sylvestris* depending on the change in their areas

equations in ecology // *Chelovek. Obshchestvo. Inklyuziya*. 2016. No. 4 (28). P. 139–144 (in Russian).

7. Magal P., Zhang Z. A system of state-dependent delay differential equation modeling forest growth I: semi-flow properties // *Journal of Evolution Equations*. 2018. V. 18. No. 4. P. 1853–1888. doi: 10.1007/s00028-018-0464-0

8. Magal P., Zhang Z. A system of state-dependent delay differential equation modelling forest growth II: Boundedness of solutions // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2018. V. 42. P. 334–352. doi: 10.1016/j.nonrwa.2018.01.002

9. Rupšys P. Modeling dynamics of structural components of forest stands based on trivariate stochastic differential equation // *Forests*. 2019. V. 10. No. 6. P. 506. doi: 10.3390/f10060506

10. Mendonça A.R., Calegario N., Silva G.F., Carvalho S.P.C. Growth and yield models for eucalyptus stands obtained by differential equations // *Scientia Agricola*. 2017. V. 74. No. 5. [Internet resource] http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-90162017000500364 (Accessed: 15.11.2018). doi: 10.1590/1678-992x-2016-0035

11. Garcia O. Functional differential equations in sustainable forest harvesting // *Journal of Forest Planning*. 2001. No. 6. P. 49–63. doi: 10.20659/jfp.6.2_49

12. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R.-U., Xabadia A. Optimal harvesting in forestry: steady-state analysis and climate change impact // *Journal of*

Biological Dynamics. 2013. V. 7. No. 1. P. 41–58. doi: 10.1080/17513758.2012.733425

13. Chudoba R., Sadílek V., Ryppl R., Vořechovský M. Using Python for scientific computing: Efficient and flexible evaluation of the statistical characteristics of functions with multivariate random inputs // *Computer Physics Communications*. 2013. V. 184. No. 2. P. 414–427. doi: 10.1016/j.cpc.2012.08.021

14. Vladimirov I.N., Popova A.K. Modeling the spatial and temporal dynamics of forest resources using intelligent GIS // *Geografiya i prirodnyye resursy*. 2009. No. 1. P. 26–31 (in Russian).

15. Taranenko Yu. Numerical solution of mathematical models of objects given by systems of differential equations [Internet resource] <https://habr.com/post/418139> (Accessed: 15.11.2018).

16. Huang L. Simulation and evaluation of different statistical functions for describing lag time distributions of a bacterial growth curve // *Microbial Risk Analysis*. 2016. V. 1. P. 47–55. doi: 10.1016/j.mran.2015.08.002.

17. Coelho A.L.F., Queiroz D.M., Valente D.S.M., Pinto F.A.C. An open-source spatial analysis system for embedded systems // *Computers and Electronics in Agriculture*. 2018. V. 154. P. 289–295. doi: 10.1016/j.compag.2018.09.019

18. Anuchin N.P. Forest taxation. Moskva: Lesnaya promyshlennost, 1982. 552 p. (in Russian).